Actions Mécaniques

1 - Définition d'une Action Mécanique (A.M.)

Une A.M. est un phénomène physique capable de :

créer un déplacement

maintenir un corps en équilibre

déformer un corps

On distingue :

- Les A.M. **de contact** ou **surfaciques**, exercées par un solide sur un autre solide par l'intermédiaire de leur surface de contact.
- Les A.M. **à distance** ou **volumique**, qui s'exercent sur tous les éléments de volume du solide sans qu'il y ait besoin de contact (ex : action de la pesanteur, forces magnétiques).

Remarque importante :

Si un système 1 exerce sur un système 2 une A.M., alors le système 2 exerce sur le système 1 une A.M. exactement opposée.

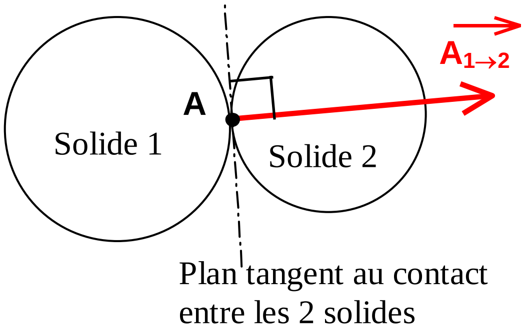
C'est ce que l'on appelle le **principe de réciprocité**.

Ex : une balle de tennis exerce sur la raquette une A.M. exactement opposée à celle qu'exerce la raquette sur la balle.

2 - Une A.M. particulière : la Force

2.1 Définition

Une **force** est l'action qu'exerce un solide sur un autre solide lorsqu'ils sont **en liaison ponctuelle**.



2.2 Caractéristiques

La force est définie par :

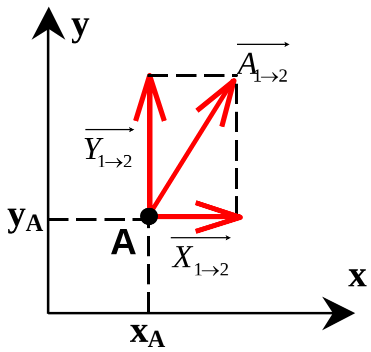
- un **point d'application** : le point de contact entre les 2 solides (ici le point A)
- une **direction** : normale (=perpendiculaire) au plan tangent au contact.
- un **sens** : du solide 1 vers le solide 2 s'il s'agit de l'A.M. de 1 sur 2.
- une **intensité** exprimée en Newton (N)

2.3 Modèle mathématique

Le modèle mathématique de la force est le **vecteur lié** ou **pointeur**, c'est à dire un vecteur auquel on associe un **point origine**.

Pour la force exercée en A par le solide 1 sur le solide 2, on utilisera la notation suivante :

$$\vec{A}_{1\to2}$$



dont les propriétés algébrique sont les suivantes :

	Coordonnées du point d'application (en mm ou en m)	Composantes algébriques du vecteur (en N)	Norme du vecteur = intensité de la force (en N)
En 2D	$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$	$\vec{A}_{1/2}\begin{pmatrix} X_{1\to2} \\ Y_{1\to2} \end{pmatrix}$	$\lVert\vec{A}_{1\to2}\rVert = \sqrt{X_{1\to2}^{\ 2} + Y_{1\to2}^{\ 2}}$
En 3D	$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$	$\vec{A}_{1/2}\begin{pmatrix} X_{1\to2} \\ Y_{1\to2} \\ Z_{1\to2} \end{pmatrix}$	$\lVert\vec{A}_{1\to2}\rVert = \sqrt{X_{1\to2}^{\ 2} + Y_{1\to2}^{\ 2} + Z_{1\to2}^{\ 2}}$ notation simplifiée : $A_{1/2}$

3 - A.M. assimilables à des forces

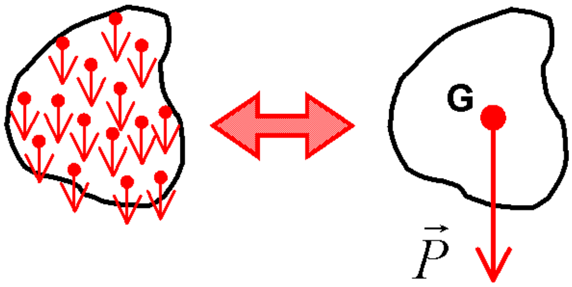
3.1 Le poids d'un solide

La **pesanteur** ou **attraction terrestre** agit sur chaque petit élément constituant un solide (A.M. à distance ou volumique).

La somme de ces petites actions mécaniques élémentaires est équivalente à une **force** dont les caractéristiques sont les suivantes :

→ point d'application : **G**, **centre de gravité** du solide
→ direction : **Verticale**
→ sens : **Vers le bas**
→ intensité : $P = m \times g$ en Newton (N)
m : masse du solide en Kg
g : accélération de la pesanteur en m.s^{-2}
$g = 9{,}81 m.s^{-2}$ mais on prendra $g = 10\, m.s^{-2}$ (2% d'erreur)

Cette force notée $\vec{P}$ s'appelle le **poids** du solide :

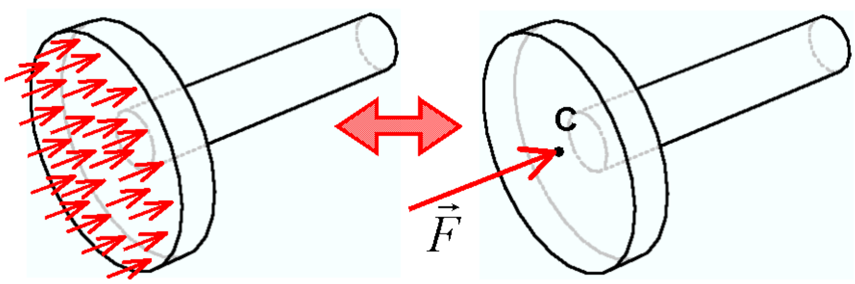


3.2 Les forces de pression

Un fluide sous pression (air, huile, …) en contact avec un solide exerce sur chaque élément de surface du solide une action mécanique élémentaire (A.M. de contact ou surfacique).

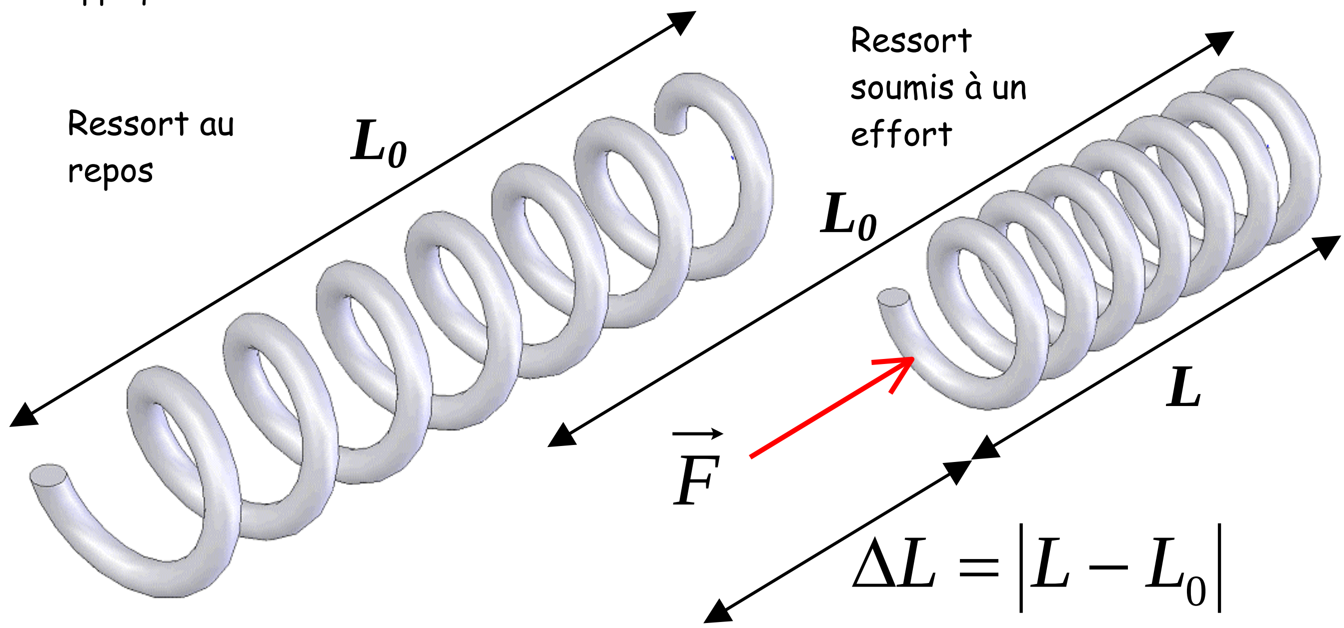
La somme de toutes ces A.M. élémentaires est équivalente à une **force** dont voici les propriétés :

→ point d'application : **C**, **centre géométrique** de la surface en contact avec le fluide
→ direction : **normale** (perpendiculaire) à la surface
→ sens : du fluide vers la surface
→ intensité : $F = p \times S$ en Newton (N)
p : pression du fluide en Pa (Pascal) ; 1 Pa = 1 N/m^2
S : surface de contact en m^2



3.3 Force exercée par un ressort hélicoïdal

Un ressort hélicoïdal se comprime ou s'étire proportionnellement à l'effort qui lui est appliqué.



La force appliquée sur le ressort a les propriétés suivantes :

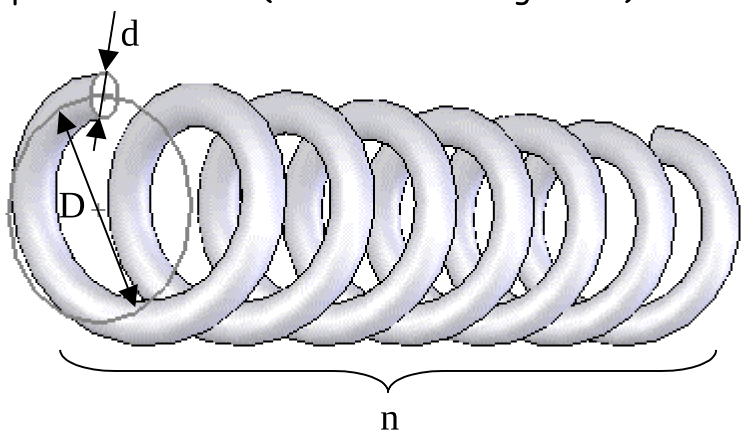
→ point d'application : extrêmité du ressort
→ direction : le long de l'axe du ressort
→ sens : dépend du sens de déformation du ressort (compression ou extension)
→ intensité : $F = k \times \Delta L$ en Newton (N)

k : **raideur** du rssort en N/mm

$\Delta L = |L - L_0|$: **flèche** (déformation du ressort) en mm

Remarque : la raideur d'un ressort dépend du **matériau** qui le compose (généralement de l'acier spécial dit "acier à ressort").
Les autres caractéristiques d'un ressort hélicoïdal qui font varier sa raideur sont :

D : diamètre d'enroulement du ressort (k diminue si D augmente)
d : diamètre du fil du ressort (k augmente si d augmente)
n : nombre de spires du ressort (k diminue si n augmente)

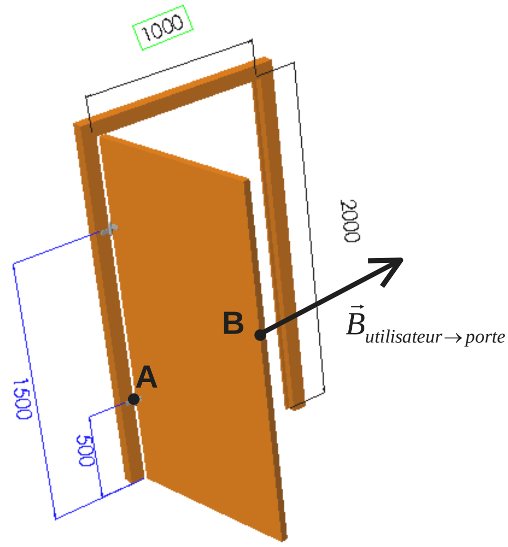


4 - Moment d'une force par rapport à un point

4.1 Signification physique du moment d'une force

Le **moment** d'une force par rapport à un point est un outil qui permet de mesurer la capacité de cette force à créer un mouvement rotation autour de ce point.

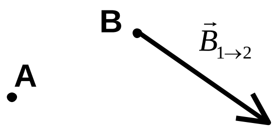
<u>Ex</u> : le moment de la force de l'utilisateur par rapport au point A est sa capacité à faire tourner la porte autour du point A :



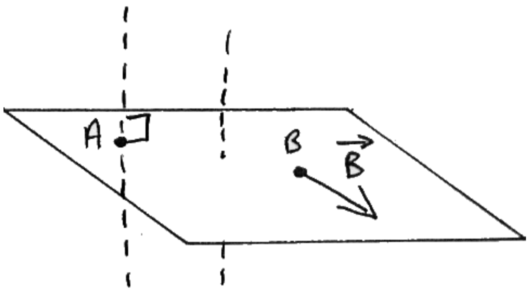
4.2 Modèle mathématique du moment d'une force

On considère une force appliquée en un point B et un point A quelconque.

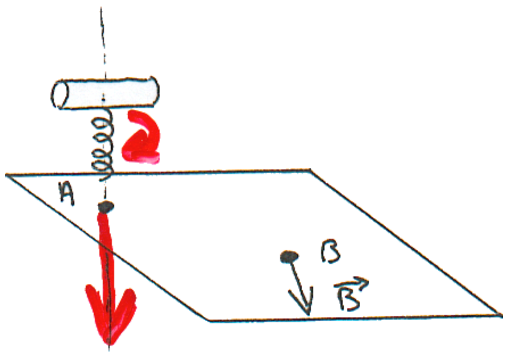
Le **moment** de $\vec{B}_{1\to2}$ par rapport au point A est un **vecteur** noté $\vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right)$ dont les caractéristiques sont les suivantes :

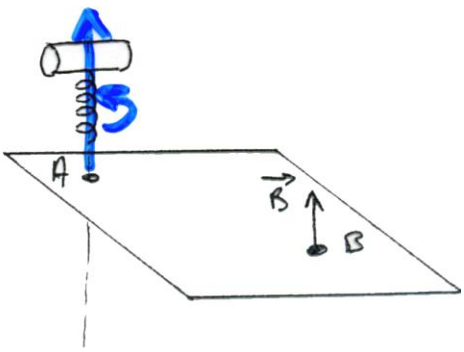


→ **<u>direction</u>** : perpendiculaire au plan contenant le point A et la force $\vec{B}_{1\to2}$:

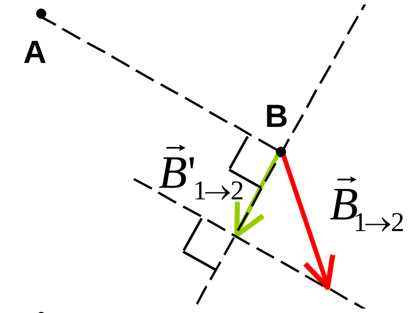


→ **<u>sens</u>** : on applique la ***règle du « tire-bouchon »*** en considérant que $\vec{B}_{1\to2}$ fait tourner le tire-bouchon autour de A. :

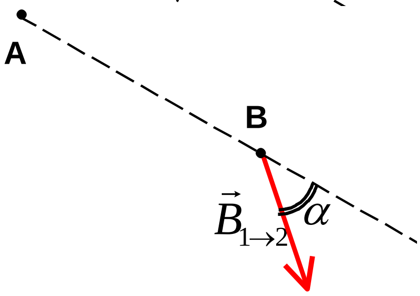




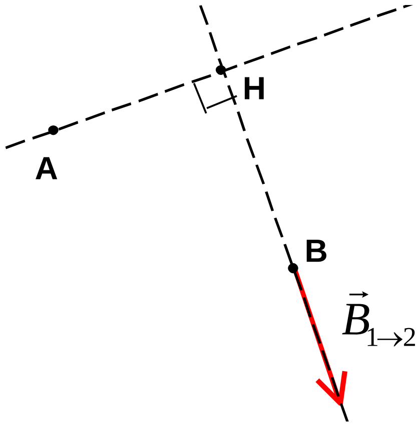
→ **intensité** : elle s'exprime en Newton mètre (N.m) et on a 3 façons équivalentes de la déterminer :



$$\boxed{M_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right) = AB\,.\,B'_{1\to2}}$$



$$\boxed{M_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right) = AB\,.\,B_{1\to2}\,.\sin\alpha}$$



$$\boxed{M_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right) = AH\,.\,B_{1\to2}}$$

4.3 Détermination analytique du moment d'une force

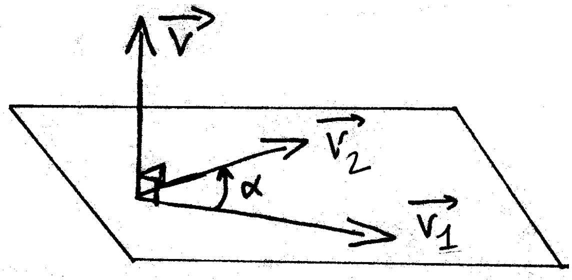
4.3.1. un outil mathématique : le produit vectoriel

Le **produit vectoriel** est une opération entre 2 vecteurs qui donne comme résulta un **vecteur**.

On note $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ qui se lit : « V1 vectoriel V2 »

Si on a $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ alors les caractéristiques de $\vec{V}$ sont les suivantes :

- **direction** : Perpendiculaire à $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ donc au plan défini par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$
- **sens** : Règle du tire-bouchon quand on rabat $\vec{V}_1$ sur $\vec{V}_2$
- **intensité** : $V = V_1 \times V_2 \times \sin\alpha$
  (α : angle entre les 2 vecteurs)

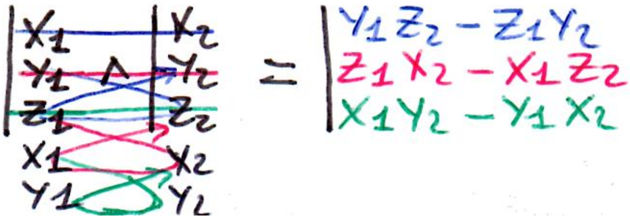


4.3.2. <u>calcul analytique du produit vectoriel</u>

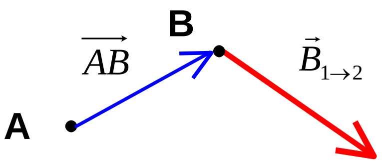
on a les vecteurs suivants : $\vec{V}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \vec{V}_1\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad \vec{V}_2\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$

si $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ alors
$$\begin{aligned} X &= Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2 \\ Y &= Z_1 X_2 - X_1 Z_2 \\ Z &= X_1 Y_2 - Y_1 X_2 \end{aligned}$$

méthode mnémotechnique :



4.3.3. <u>détermination du moment à l'aide du produit vectoriel</u>



Le moment par rapport au point A de la force appliquée en B a pour expression :

$$\boxed{\vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\rightarrow2}\right) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{B}_{1\rightarrow2}}$$

si les coordonnées des vecteurs et des points sont les suivantes :

$$\vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\rightarrow2}\right)\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \quad \vec{B}_{1\rightarrow2}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

alors on a :
$$\vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\rightarrow2}\right) = \begin{vmatrix} L \\ M \\ N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X \\ Y \\ Z \end{vmatrix}$$

5 - <u>Modélisation d'une force par un torseur</u>

Nous avons vu qu'une **force** était complètement définie par :
- un **point d'application** (<u>ex</u> : **B**)
- un **vecteur** (<u>ex</u> : $\vec{B}_{1\rightarrow2}$)

Elle peut être aussi complètement définie par :
- un **vecteur** (<u>ex</u> : $\vec{B}_{1\rightarrow2}$)
- son **moment** par rapport à un point quelconque (<u>ex</u> : $\vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\rightarrow2}\right)$)

On peut alors modéliser la force à l'aide d'un **torseur** :

torseur de la force de 1 sur 2

vecteur force

coordonnées du vecteur force (en N)

base dans laquelle sont exprimées les coordonnées des vecteurs

$$\{\tau_{1\to2}\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \vec{B}_{1\to2} \\ \vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right) \end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix} X_{1\to2} & L_{A\,1\to2} \\ Y_{1\to2} & M_{A\,1\to2} \\ Z_{1\to2} & N_{A\,1\to2} \end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

point de réduction du torseur

moment de la force par rapport au point de réduction du torseur

coordonnées du vecteur moment (en N.m)

6 - Modélisation d'une A.M. quelconque par un torseur

Toute action mécanique (force ou autre) exercée sur un système S par une entité E extérieure à S peut être modélisée par un torseur :

$$\{\tau_{E\to S}\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \vec{R}_{E\to S} \\ \vec{M}_A(E\to S) \end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{matrix}\right\}$$

$\vec{R}_{E\to S}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ est la **résultante** de l'A.M. de E sur S

$\vec{M}_A(E\to S)\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix}$ est le **moment résultant** au point A de l'A.M. de E sur S

Remarques : ❶ Un même torseur peut s'écrire en n'importe quel point :

$$\{\tau_{E\to S}\} = {}_A\left\{\begin{matrix} \vec{R}_{E\to S} \\ \vec{M}_A(E\to S) \end{matrix}\right\} = {}_B\left\{\begin{matrix} \vec{R}_{E\to S} \\ \vec{M}_B(E\to S) \end{matrix}\right\} = {}_{...}\left\{\begin{matrix} \vec{R}_{E\to S} \\ \vec{M}_{...}(E\to S) \end{matrix}\right\}$$

son expression varie mais il modélise toujours la même A.M.

❷ La résultante d'un torseur est **invariante** (ne change pas) quel que soit le point auquel on exprime le torseur.

$$\vec{R}_{E\to S} = cste$$

❸ $\left\{\tau_{E\to S}\right\}$ est souvent la somme des torseurs des forces élémentaires qu'exerce E sur S.

On peut faire la somme de 2 torseurs uniquement s'ils sont **exprimés au même point** (même point de réduction). Dans ce cas on additionne les résultantes entre elles et les moments entre eux :

$$_A\begin{Bmatrix} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{Bmatrix} + {}_A\begin{Bmatrix} X_2 & L_2 \\ Y_2 & M_2 \\ Z_2 & N_2 \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_1+X_2 & L_1+L_2 \\ Y_1+Y_2 & M_1+M_2 \\ Z_1+Z_2 & N_1+N_2 \end{Bmatrix}$$

❹ Le Principe des actions réciproques stipule que l'A.M. d'un système E sur un système S est exactement opposée à l'A.M. de S sur E :

$$\left\{\tau_{E\to S}\right\} = -\left\{\tau_{S\to E}\right\}$$

$$_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{E\to S} \\ \vec{M}_A(E\to S) \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} -\vec{R}_{S\to E} \\ -\vec{M}_A(S\to E) \end{Bmatrix}$$

$$_A\begin{Bmatrix} X_{E\to S} & L_A(E\to S) \\ Y_{E\to S} & M_A(E\to S) \\ Z_{E\to S} & N_A(E\to S) \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} -X_{S\to E} & -L_A(S\to E) \\ -Y_{S\to E} & -M_A(S\to E) \\ -Z_{S\to E} & -N_A(S\to E) \end{Bmatrix}$$

7 - Changement du point de réduction d'un torseur

Lorsqu'on change le point de réduction d'un torseur, seule l'expression du moment résultant varie.

La **loi du transport des moments** permet alors, connaissant le moment de l'A.M. en un point, de déterminer le moment en n'importe quel point :

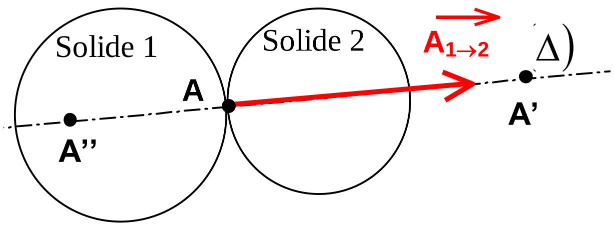
$$\boxed{\vec{M}_B(1\to 2) = \vec{M}_A(1\to 2) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}_{1\to 2}}$$

8 - Torseurs particuliers

8.1 Le torseur glisseur

Un **torseur glisseur** est un torseur qui peut toujours s'écrire avec un **moment résultant nul**, à condition qu'on l'exprime en un point d'une droite particulière appelée **axe principal** du torseur :

$\{\tau\} = {}_A\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$ si $A \in (\Delta)$ $\quad (\Delta)$: axe principal du torseur ex : Les A.M. de type force sont modélisables par des glisseurs. En effet, quelle que soit le point de la droite d'action de la force où l'on exprime le torseur, son moment résultant est nul :



$$\{\tau_{1\to2}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{1\to2} & 0 \\ Y_{1\to2} & 0 \\ Z_{1\to2} & 0 \end{Bmatrix} = {}_{A'}\begin{Bmatrix} X_{1\to2} & 0 \\ Y_{1\to2} & 0 \\ Z_{1\to2} & 0 \end{Bmatrix} = {}_{A''}\begin{Bmatrix} X_{1\to2} & 0 \\ Y_{1\to2} & 0 \\ Z_{1\to2} & 0 \end{Bmatrix}$$

car $A, A', A'' \in (\Delta)$

8.2 Le torseur couple

Un **torseur couple** est un torseur dont la résultante est nulle quel que soit le point auquel on l'exprime :

$$\{\tau\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ 0 & N \end{Bmatrix} \quad \forall A$$

D'après la loi du transport des moments :

$$\vec{M}_B(\tau) = \vec{M}_A(\tau) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}(\tau) = \vec{M}_A(\tau) \qquad \text{car} \qquad \vec{R}(\tau) = 0$$

Donc l'expression d'un torseur couple reste la même quel que soit son point de réduction.

ex : l'A.M. qu'exerce le stator d'un moteur électrique sur son rotor peut être modélisée par un torseur couple

9 - A.M. transmissibles par les liaisons usuelles

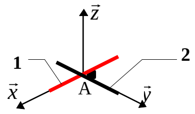
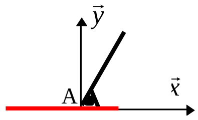
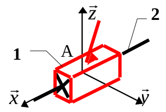
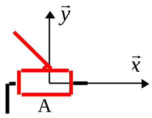
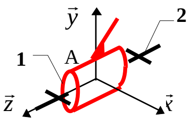
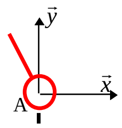
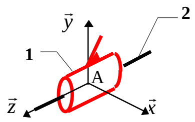
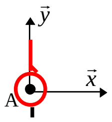
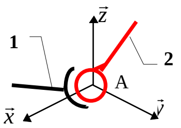
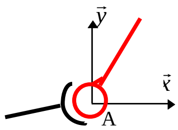
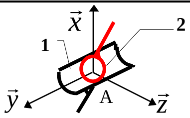
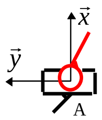
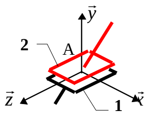
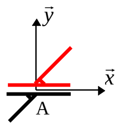
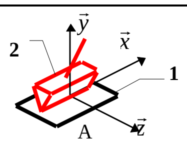
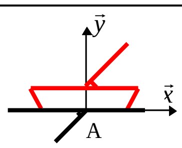
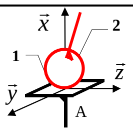
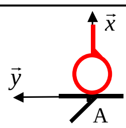
9.1 Cas des liaisons parfaites

On dit que des liaisons sont « parfaites » si on considère qu'il n'y pas de **frottement**, c'est à dire que les déplacements autorisés par la liaison se font sans aucune résistance.

Lorsque 2 pièces (ou groupes cinématiques) sont liées par une liaison usuelle parfaite, la forme de l'A.M. qu'elles peuvent exercer l'une sur l'autre dépend de la nature de la liaison (voir tableau).

Si la liaison permet un mouvement de **translation** suivant une direction, **aucune résultante** ne peut alors être transmise suivant cette direction.

Si la liaison permet un mouvement de **rotation** autour d'un axe, **aucun moment** ne peut alors être transmis selon cet axe.

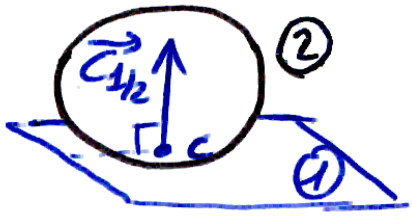
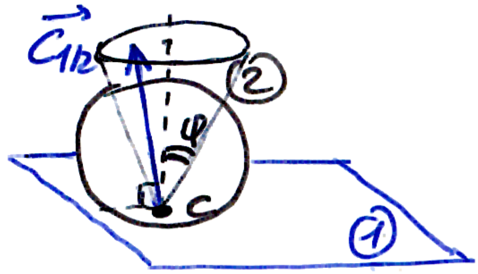
Nature de la liaison et position par rapport au repère	Schématisation spatiale	Schématisation plane	Mouvements possibles	Torseur transmissible $\{\mathcal{T}_{1\to2}\}$ au point A
Encastrement R quelconque			$\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}$	$_A\left\{\begin{matrix}X & L\\ Y & M\\ Z & N\end{matrix}\right\}$
Glissière d'axe $(A,\vec{x})$			$\left\{\begin{matrix}Tx & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}$	$_A\left\{\begin{matrix}0 & L\\ Y & M\\ Z & N\end{matrix}\right\}$
Pivot d'axe $(A,\vec{z})$			$\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & Rz\end{matrix}\right\}$	$_A\left\{\begin{matrix}X & L\\ Y & M\\ Z & 0\end{matrix}\right\}$
Pivot glissant d'axe $(A,\vec{z})$			$\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ Tz & Rz\end{matrix}\right\}$	$_A\left\{\begin{matrix}X & L\\ Y & M\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}$
Rotule de centre A			$\left\{\begin{matrix}0 & Rx\\ 0 & Ry\\ 0 & Rz\end{matrix}\right\}$	$_A\left\{\begin{matrix}X & 0\\ Y & 0\\ Z & 0\end{matrix}\right\}$
Linéaire annulaire de centre A et d'axe $(A,\vec{y})$			$\left\{\begin{matrix}0 & Rx\\ Ty & Ry\\ 0 & Rz\end{matrix}\right\}$	$_A\left\{\begin{matrix}X & 0\\ 0 & 0\\ Z & 0\end{matrix}\right\}$
Appui plan de normale $(A,\vec{y})$			$\left\{\begin{matrix}Tx & 0\\ 0 & Ry\\ Tz & 0\end{matrix}\right\}$	$_A\left\{\begin{matrix}0 & L\\ Y & 0\\ 0 & N\end{matrix}\right\}$
Linéaire rectiligne de normale $(A,\vec{y})$ et de droite de contact $(A,\vec{x})$			$\left\{\begin{matrix}Tx & Rx\\ 0 & Ry\\ Tz & 0\end{matrix}\right\}$	$_A\left\{\begin{matrix}0 & 0\\ Y & 0\\ 0 & N\end{matrix}\right\}$
Ponctuelle de normale $(A,\vec{x})$			$\left\{\begin{matrix}0 & Rx\\ Ty & Ry\\ Tz & Rz\end{matrix}\right\}$	$_A\left\{\begin{matrix}X & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{matrix}\right\}$

9.2 Cas des contacts avec frottements

Jusqu'à présent nous avons considéré les liaisons comme parfaites, c'est à dire sans efforts dus au frottement.

Dans la réalité, les frottements vont créer des efforts supplémentaires qui s'opposent aux déplacements.

ex : contact ponctuel

Sans frottement	Avec frottement
	
$\vec{C}_{1\rightarrow2}$ est normale à la surface de contact.	$\vec{C}_{1\rightarrow2}$ est comprise dans un cône de demi-angle au sommet φ par rapport à la normale au contact.

Le **coefficient de frottement** $f = \tan\varphi$ dépend essentiellement du couple de matériaux en contact.

Tant que $\vec{C}_{1\rightarrow2}$ est à l'intérieur du cône de frottement d'angle φ, il n'y a pas glissement possible entre les solides 1 et 2 (on dit qu'il y a adhérence).

Lorsqu'il y a glissement entre 1 et 2, $\vec{C}_{1\rightarrow2}$ se trouve en limite du cône d'adhérence et fait donc un angle φ avec la normale au contact :