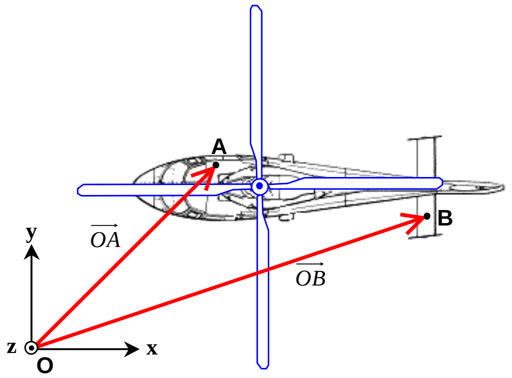
Cinématique

1 - Trajectoire, vitesse, accélération

1.1 Position d'un solide

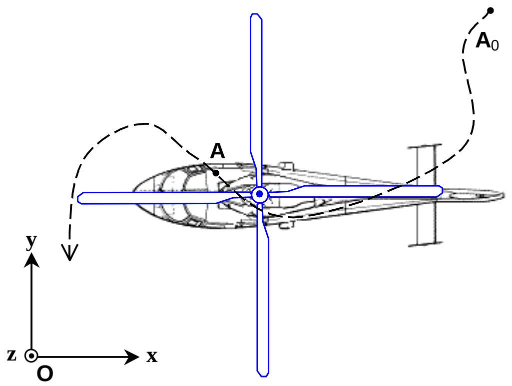


La **position** d'un solide par rapport à un repère R est définie par les coordonnées de ses différents point dans ce repère.

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$$

Ces coordonnées varient en fonction du temps.

1.2 Trajectoire d'un point et abscisse curviligne



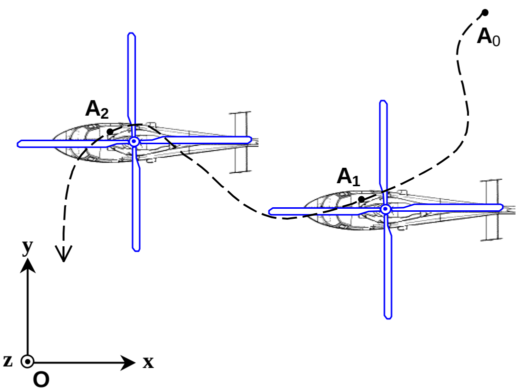
La **trajectoire** d'un point est l'ensemble des positions qu'il a occupé pendant un intervalle de temps donné.

L'**abscisse curviligne** s est la longueur de l'arc allant de l'origine de la trajectoire A_0 (position de A à t=0) au point A (position à l'instant présent).

$$s = \overline{A_0A}$$

1.3 Vitesse d'un point

1.3.1. vitesse moyenne

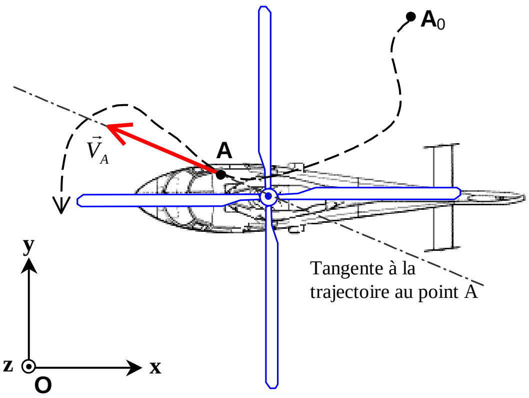


La vitesse moyenne d'un point A entre 2 dates t_1 et t_2 est :

$$V_{moy} = \frac{\overline{A_1A_2}}{t_2 - t_1} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps de parcours}}$$

en m/s (ou m.s^{-1})

1.3.2. <u>vecteur vitesse instantannée</u>



Les propriétés du vecteur vitesse du point A à l'instant t sont les suivantes :

$\vec{V}_A$

- <u>point d'application</u> : A (position à l'instant t)
- <u>direction</u> : tangente à la trajectoire
- <u>sens</u> : sens de parcours de la trajectoire
- <u>intensité</u> : $v(t)=\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{\text{variation infime de trajectoire}}{\text{variation infime de temps}}$

en m/s (ou m.s^{-1})

Le vecteur vitesse instantanée est en fait la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

$$\vec{V}_A=\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{OA}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \vec{V}_A\begin{pmatrix}x'(t)\\y'(t)\\z'(t)\end{pmatrix}$$

1.4 <u>**Accélération d'un point**</u>

1.4.1. <u>vecteur accélération instantanée</u>

$$\overrightarrow{a_A}=\frac{d\vec{V}_A}{dt}=\begin{vmatrix}v_x'(t)\\v_y'(t)\\v_z'(t)\end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{a_A}=\frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2}=\begin{vmatrix}x''(t)\\y''(t)\\z''(t)\end{vmatrix}$$

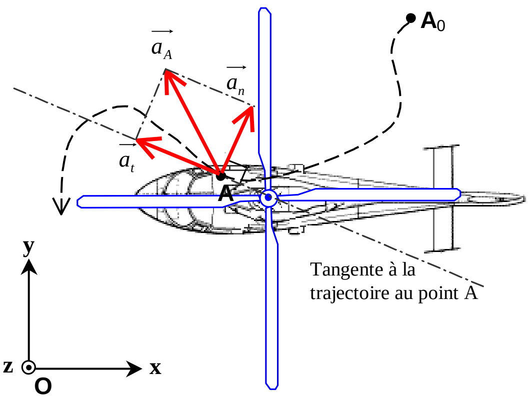
intensité en m/s^2 (ou m.s^{-2})

1.4.2. <u>accélération normale et tangentielle</u>

Le vecteur accélération instantanée peut toujours se décomposer en :

- un composante perpendiculaire à la trajectoire : l'**accélération normale**
- un composante tangente à la trajectoire : l'**accélération tangentielle**

$$\overrightarrow{a_A}=\overrightarrow{a_t}+\overrightarrow{a_n}$$



- $\overrightarrow{a_t}$ est dans le sens de la trajectoire si le point A accélère et dans le sens opposé s'il ralentit.

$$a_t=\frac{dv}{dt}$$

- $\overrightarrow{a_n}$ est toujours dirigée vers l'intérieure de la courbure de la trajectoire.

$a_n=\dfrac{v^2}{R}$ R : rayon de courbure de la trajectoire

1.5 <u>**Mouvements particuliers d'un point**</u>

1.5.1. <u>Mouvement rectiligne uniforme (M.R.U.)</u>

La trajectoire du point est rectiligne et sa vitesse est constante.

Si $(O,\vec{x})$ est l'axe de la trajectoire, l'équation des abscisses est :

$$\boxed{x(t) = v.t + x_0}$$

avec $x(t)$: abscisse du point sur $(O,\vec{x})$ en fonction du temps t

v : vitesse constante (indépendante de t)

x_0 : abscisse à $t = 0$

1.5.2. Mouvement rectiligne uniformément varié (M.R.U.V.)

La trajectoire est rectiligne et l'accélération est constante (positive ou négative).
Si $(O,\vec{x})$ est l'axe de la trajectoire,

- l'équation de la vitesse est : $\boxed{v(t) = a.t + v_0}$
- l'équation des abscisses est : $\boxed{x(t) = \frac{1}{2}a.t^2 + v_0.t + x_0}$

avec $v(t)$: vitesse en fonction du temps t

$x(t)$: abscisse du point sur $(O,\vec{x})$ en fonction du temps t

a : accélération constante (indépendante de t)

v_0 : vitesse à $t = 0$

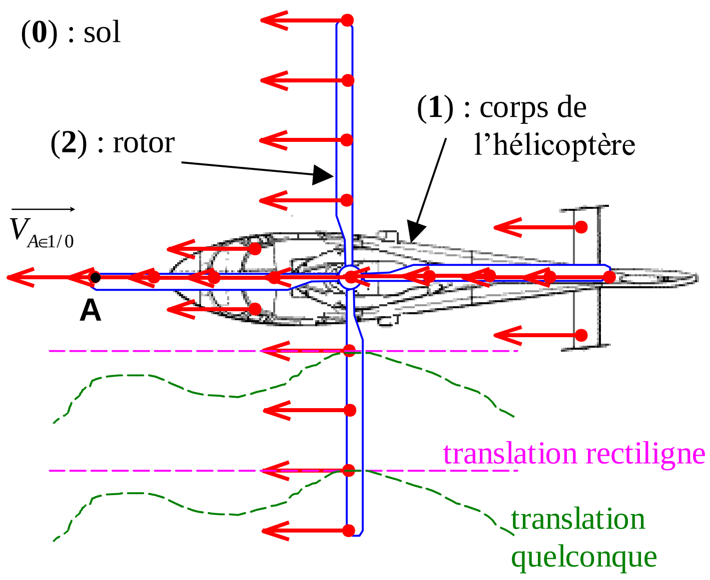
x_0 : abscisse à $t = 0$

2 - Mouvements plans

2.1 Mouvement de translation

Le corps 1 est en mouvement de **translation** par rapport au sol 0.

→ Les vecteurs vitesse de 1/0 sont **identiques en tout point** (appartenant ou non physiquement au solide 1).



On distingue :

- la **translation rectiligne** (les trajectoires des points sont des droites parallèles).
- la **translation quelconque** (les trajectoires des points sont quelconques mais toutes identiques).

2.2 Mouvement de rotation

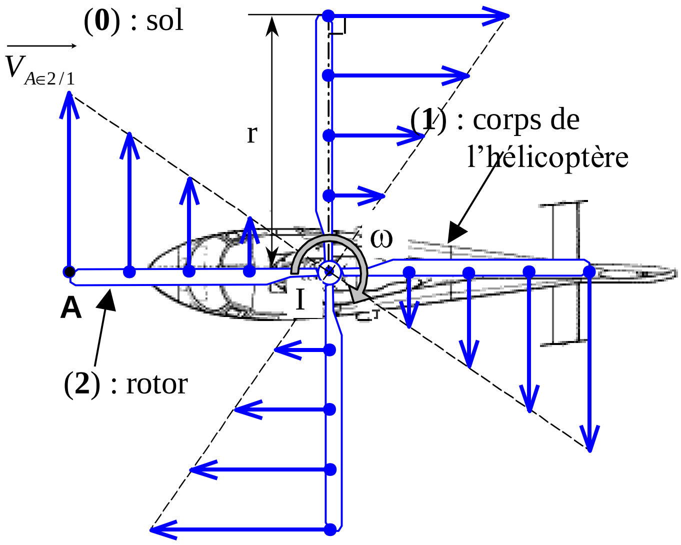
Le rotor 2 est en mouvement de **rotation** par rapport au corps 1.

→ Les vecteurs vitesse de 2/1 sont perpendiculaires à la droite joignant leur origine et le centre de rotation I.

Intensité :

$$\boxed{V = \omega . r = 2\pi N . r}$$

ω en rad/s
N en tour/s



2.3 Composition de mouvement

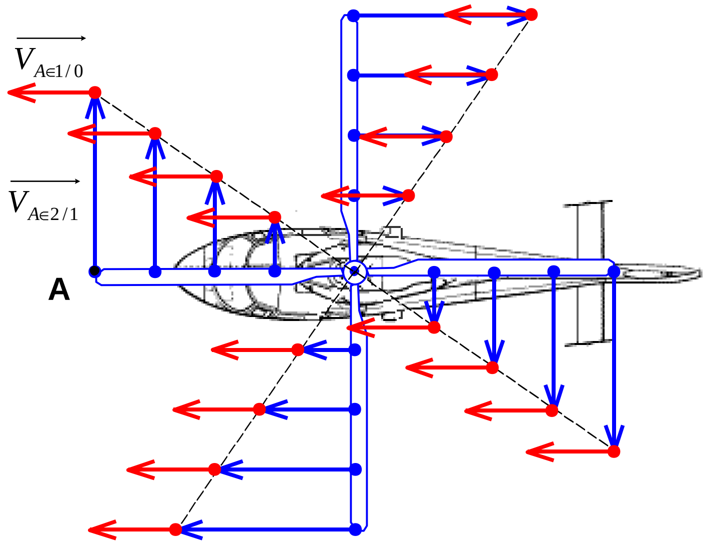
Le mouvement de 2/0 est la **composition** du mouvement de 2/1 et du mouvement de 1/0.

En tout point A on a :

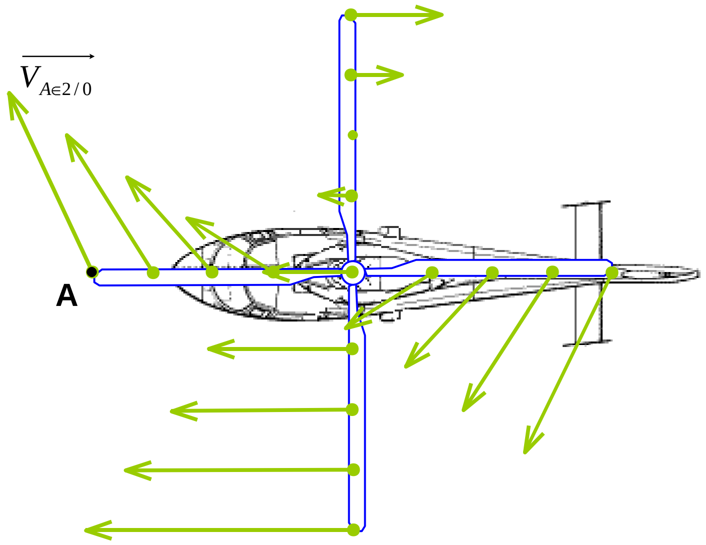
$$\boxed{\overrightarrow{V_{A\in 2/0}} = \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{A\in 1/0}}}$$

De façon générale on a :

$$\overrightarrow{V_{A\in a/i}} = \overrightarrow{V_{A\in a/b}} + \overrightarrow{V_{A\in b/c}} + \ldots$$
$$\ldots + \overrightarrow{V_{A\in g/h}} + \overrightarrow{V_{A\in h/i}}$$



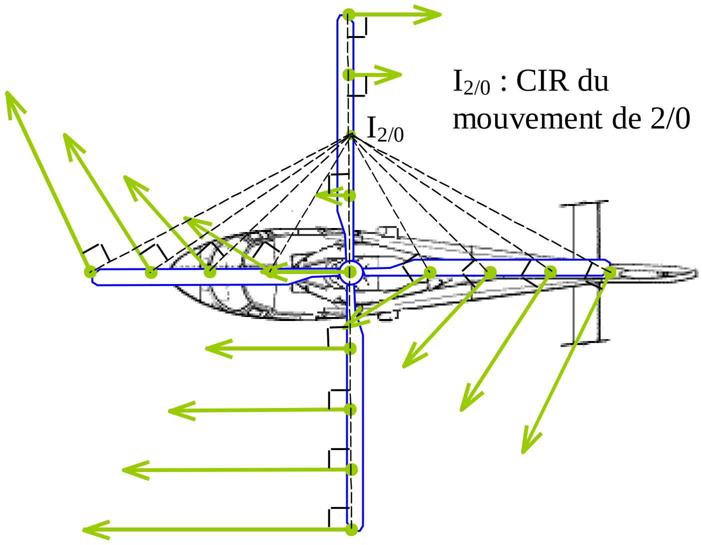
C'est la loi de **composition des vitesses**.



2.4 Centre instantané de rotation (C.I.R.)

Pour tout mouvement d'un solide par rapport à un autre qui n'est pas une translation rectiligne pure, il existe à tout instant un point où **la vitesse est nulle**, c'est le **C.I.R.** (**Centre instantané de rotation**).

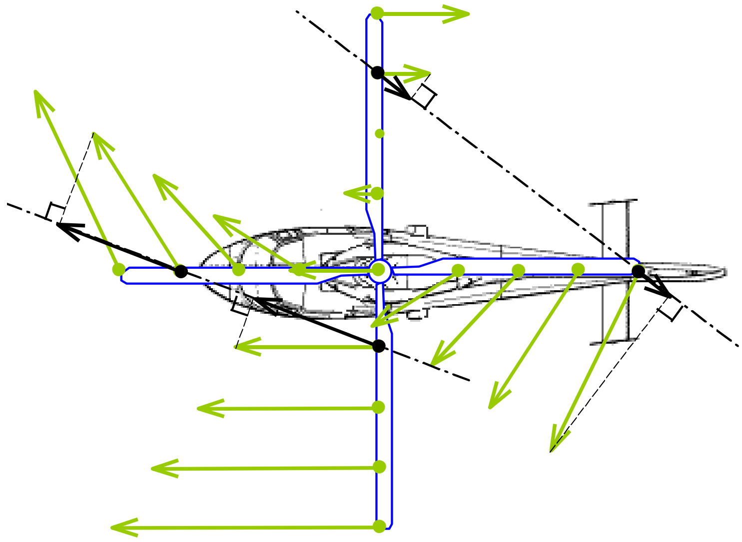
Tous les vecteurs vitesse de ce mouvement sont perpendiculaires à la droite joignant leur origine et le C.I.R.



2.5 Equiprojectivité des vecteurs vitesse

Quel que soit le mouvement entre 2 solide, les projections orthogonales de 2 vecteurs vitesse quelconques de ce mouvement sur l'axe joignant leurs origines sont identiques.

On dit qu'il y a **équiprojectivité** du champ des vecteurs vitesse.



3 - Torseur cinématique

3.1 Définition

Le **torseur cinématique** permet de définir complètement **à un instant donné** le mouvement d'un solide (2) par rapport à un autre (1) :

torseur du mouvement de 2 par rapport à 1

vecteur rotation instantanée

coordonnées du vecteur rotation instantanée (en rad/s)

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{A\in 2/1} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \Omega x_{2/1} & Vx_{A\in 2/1} \\ \Omega y_{2/1} & Vy_{A\in 2/1} \\ \Omega z_{2/1} & Vz_{A\in 2/1} \end{Bmatrix}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

base dans laquelle sont exprimées les coordonnées des vecteurs

point de réduction du torseur

vecteur vitesse instantanée du point de réduction

coordonnées du vecteur vitesse instantanée (en m/s)

3.2 Changement de point de réduction

Lorsqu'on connaît le torseur cinématique du mouvement d'un solide en un point, on peut le déterminer en n'importe quel point :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{A\in 2/1} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{\mathbf{B}\in 2/1} \end{Bmatrix}_B \quad \text{avec} \quad \vec{V}_{\mathbf{B}\in 2/1} = \vec{V}_{A\in 2/1} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}$$

3.3 Cas particuliers

3.3.1. Expression du torseur au C.I.R.

Au C.I.R. du mouvement de 2/1 qu'on appelle $I_{2/1}$, la vitesse est nulle :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_{I_{2/1}} \quad \text{d'où} \quad \vec{V}_{M\in 2/1} = \overrightarrow{MI_{2/1}} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{I_{2/1}M}$$

En réalité, dans l'espace il y a une infinité de C.I.R. le long d'un axe parallèle à $\vec{\Omega}_{2/1}$. On parle d'**axe instantané de rotation**.

3.3.2. Torseur d'un mouvement de translation

Dans le cas d'une translation de 2/1, le vecteur rotation est nul :

$$\{\mathcal{V}_{2/1}\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{V}_{A\in 2/1} \end{Bmatrix}_A \quad \text{avec} \quad \vec{V}_{\mathbf{B}\in 2/1} = \vec{V}_{A\in 2/1} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{0} = \vec{V}_{A\in 2/1}$$

L'expression du torseur est la même en n'importe quel point (la vitesse est identique en chaque point du solide).