

Dynamique

1 - Principe fondamental de la dynamique (P.F.D.)

1.1 P.F.D. appliqué à un point matériel

On appelle **point matériel** un point (sans volume) affecté d'une masse.

On considère un système matériel élémentaire (S) constitué uniquement d'un point matériel M de masse m.

(S) est soumis à des A.M. extérieures modélisées par le torseur $\mathcal{T}_{ext \rightarrow S}$ et il subit une accélération $\overrightarrow{a_{M \in S/R}}$ par rapport à un repère **galiléen** R (voir chapitre sur le P.F.S.).

En un point quelconque A, le principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) s'exprime alors de la façon suivante :

$$\mathcal{T}_{ext \rightarrow S} \underset{A}{\equiv} \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{ext \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{A(ext \rightarrow S)}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{a_{M \in S/R}} \\ \overrightarrow{AM} \wedge m \overrightarrow{a_{M \in S/R}} \end{array} \right\}_A$$

1.2 P.F.D. appliqué à un système matériel

Un **système matériel** (S) quelconque de masse m peut être considéré comme une somme de points matériels de masses m_i avec $m = \sum_{i \in S} m_i$

On appelle G le centre de gravité de (S).

Le P.F.D. appliqué à (S) s'exprime alors de la façon suivante en un point A quelconque :

$$\mathcal{T}_{ext \rightarrow S} \underset{A}{\equiv} \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{ext \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{A(ext \rightarrow S)}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{a_G} \\ \sum_{i \in S} \left(\overrightarrow{AM} \wedge m \overrightarrow{a_{M \in S/R}} \right) \end{array} \right\}_A$$

les accélérations étant comme précédemment par rapport à un référentiel galiléen.

2 - P.F.D. appliqué à un solide en mouvement de translation (rectiligne ou curviligne)

2.1 Réduction en un point A quelconque

$$\mathcal{T}_{ext \rightarrow S} \underset{A}{\equiv} \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{ext \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{A(ext \rightarrow S)}} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{AG} \wedge m \overrightarrow{a} \end{array} \right\}_A$$

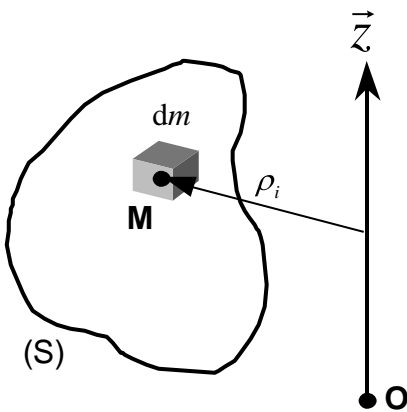
2.2 Réduction en G centre de gravité de S

$$\mathcal{T}_{ext \rightarrow S} \underset{G}{\equiv} \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{ext \rightarrow S}} \\ \overrightarrow{M_{G(ext \rightarrow S)}} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} m \overrightarrow{a} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

3 - P.F.D. appliqué à un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe de symétrie de (S)

3.1 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

3.1.1. définition



Soit dm la masse d'un point matériel élémentaire M appartenant à un solide (S)

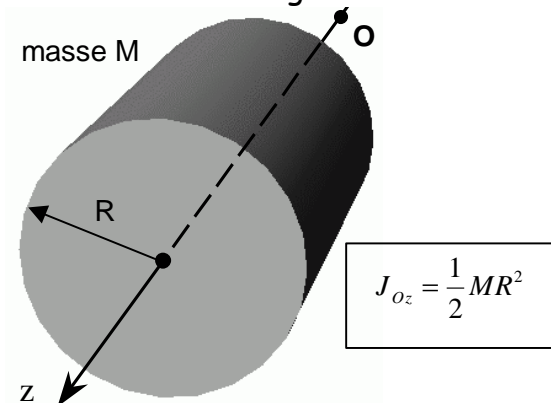
On considère un axe $\langle O, \vec{z} \rangle$. Soit ρ_i la distance entre M et $\langle O, \vec{z} \rangle$.

On appelle **moment d'inertie** J_{Oz} de (S) par rapport à l'axe $\langle O, \vec{z} \rangle$ le scalaire suivant :

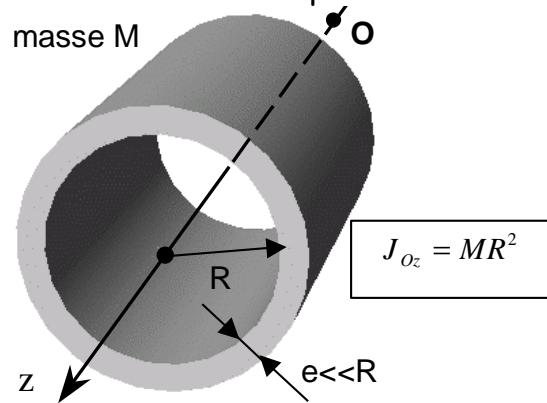
$$J_{Oz} = \sum_{\langle S \rangle} \rho_i^2 dm$$

3.1.2. quelques valeurs particulières à connaître

Cylindre de révolution plein et homogène



Enveloppe cylindrique homogène de faible épaisseur



3.2 P.F.D. exprimé en un point O de l'axe de rotation

$$\vec{\tau}_{ext \rightarrow S} \Big|_O \equiv \begin{Bmatrix} \vec{R}_{ext \rightarrow S} \\ M_{G(ext \rightarrow S)} \end{Bmatrix} \Big|_O = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ J_{Oz} \theta'' \vec{z} \end{Bmatrix}$$

θ'' est l'accélération angulaire de (S) autour de $\langle O, \vec{z} \rangle$.

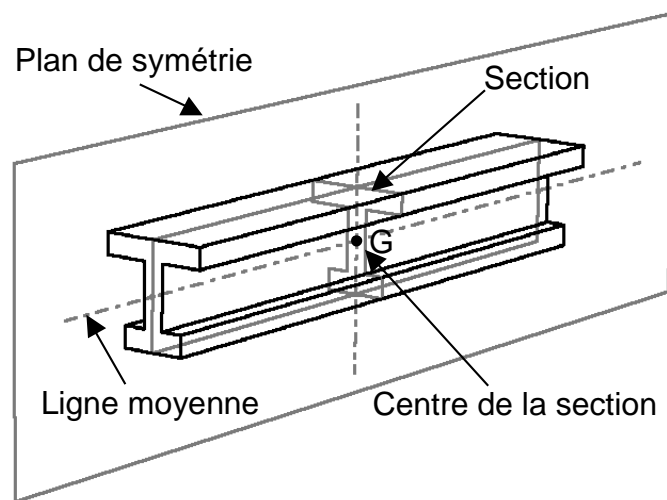
O est un point quelconque de l'axe de rotation $\langle O, \vec{z} \rangle$ qui est aussi un axe de symétrie de (S).

Résistance des matériaux

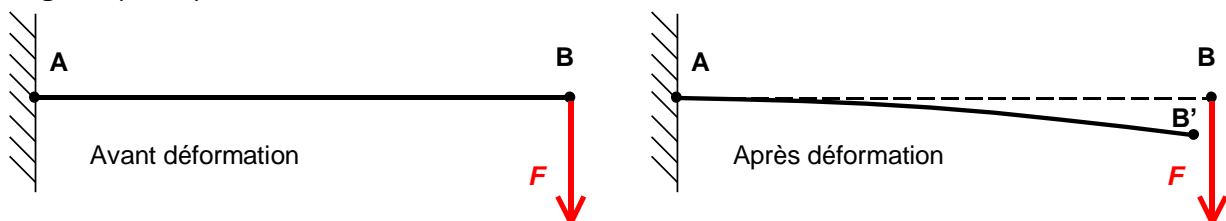
1 - Hypothèses de la R.D.M.

La résistance des matériaux (R.D.M.) se base sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices :

- Le **matériau** est **homogène** (pareil partout) et **isotrope** (même propriétés dans toutes les directions, ce qui n'est pas le cas des matériaux composites)
- Les **pièces** étudiées sont assimilables à des **poutres** c'est à dire :
 - grande longueur par rapport aux autres dimensions
 - forme droite (ou très faiblement courbée)
 - section constante (ou variant très progressivement)
 - existence d'un plan de symétrie dans le sens de la longueur.



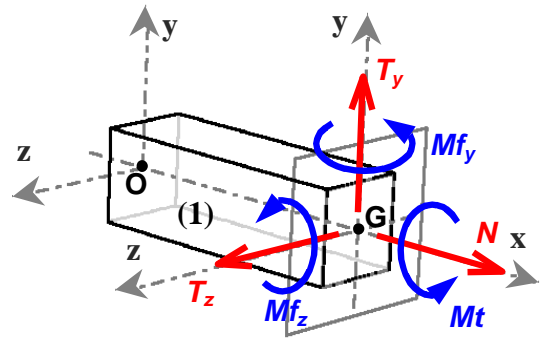
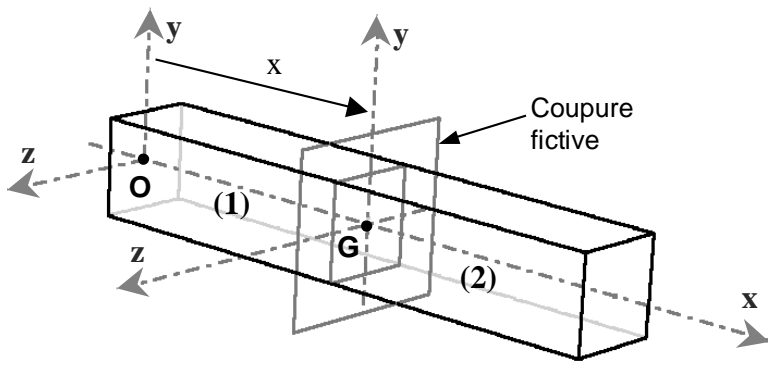
- Les **actions mécaniques** sont comprises dans le plan de symétrie de la poutre ou sont symétriques par rapport à celui-ci.
- Les **déformations** sont **faibles** donc on suppose que les points d'application des A.M. ne bougent pas après déformation.



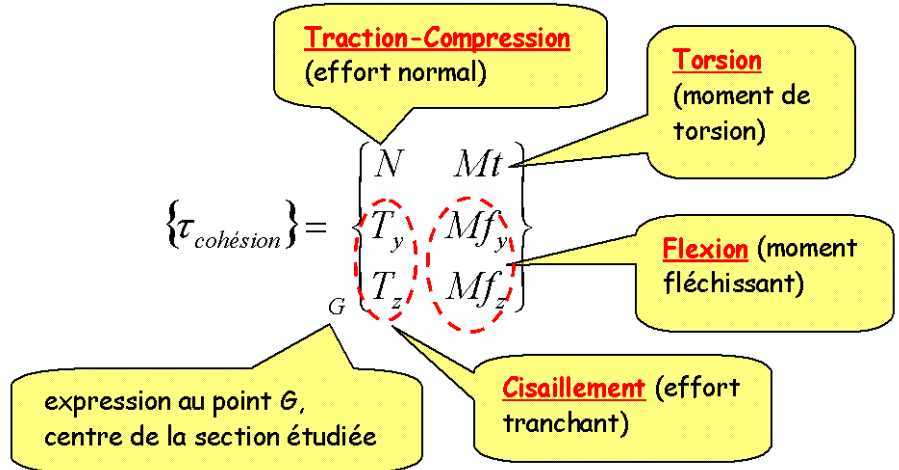
2 - Torseur de cohésion d'une poutre

Le **torseur de cohésion** modélise l'action mécanique d'une partie de la poutre sur une autre partie de la poutre, de part et d'autre d'une coupure fictive.

C'est la somme de toutes les A.M. élémentaires qu'exercent les particules de matière (atomes, molécules) pour assurer la cohésion du matériau.



$$\begin{aligned} \tau_{cohésion} &= \tau_{2 \rightarrow 1} \\ &= -\tau_{Ext \rightarrow 1} \\ &= \tau_{Ext \rightarrow 2} \end{aligned}$$

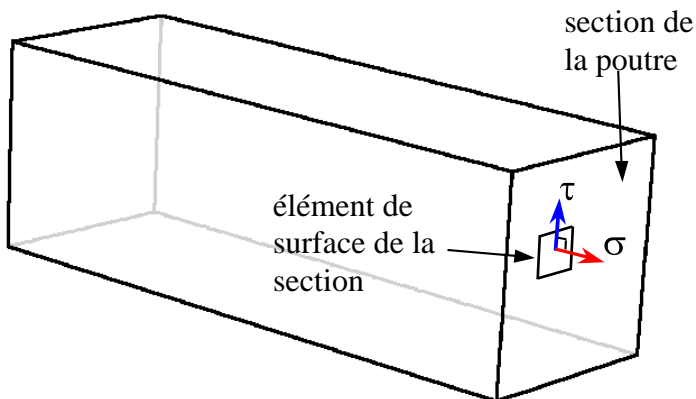


3 - Contraintes locales dans le matériau

L'A.M. de cohésion se traduit en différents points de la section étudiée par des **contraintes locales**.

Ces contraintes peuvent être de 2 types :

- contraintes **normales** σ , perpendiculaires à la section.
- contraintes **tangentes** τ , parallèles à la section.



σ et τ s'expriment en **pascal (Pa)** ou **méga-pascal (Mpa)**

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$$

$$1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$$

4 - Caractéristiques mécaniques d'un matériau

Suivant l'intensité des contraintes qu'on lui applique le matériau à des comportements différents :

- **déformations élastiques** : le matériau se déforme sous la contrainte puis revient en position initiale lorsqu'on supprime les efforts.
- **déformations plastiques** : le matériau se déforme sous la contrainte et reste déformé lorsqu'on supprime les efforts.
- **rupture** : sous la contrainte, le matériau se rompt.

Pour caractériser chaque matériau on utilise alors les paramètres suivants :

E : **module de Young** (coefficient d'élasticité longitudinale)

G : **module de Coulomb** (coefficient d'élasticité transversale)

σ_e et τ_e : contraintes limites de comportement élastique

σ_r et τ_r : contraintes de rupture.

Exemples de valeurs (approximatives, varient en fonction des alliages et traitements) :

Matériau	E (MPa)	σ_e (MPa)	σ_r (MPa)	G (MPa)	τ_e (MPa)	τ_r (MPa)
Acier d'usage courant	200000	250	400	80000	$\sigma_e/2$	$\sigma_r/2$
Acier spéciaux	200000	400	750	80000	$\sigma_e/2$	$\sigma_r/2$
Fonte	100000	200	300	40000		σ_r
Aluminium (Duralumin)	72000	240		32000		
Béton		comp. 15 trac. 1,5				
Polyamide	1830	49				

5 - Traction - Compression

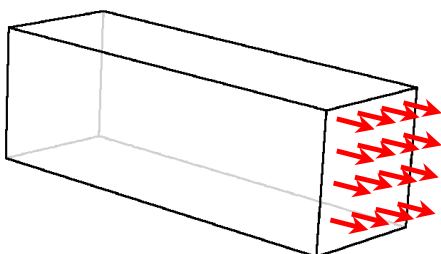
5.1 Relation Sollicitation - Contrainte

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

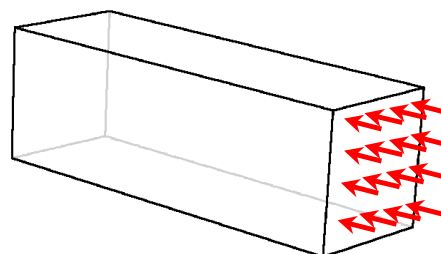
N : effort normal en N

S : surface de la section en m^2

La contrainte normale engendrée est identique dans toute la section :



traction



compression

5.2 Loi de comportement élastique

E : module de Young en Pa

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

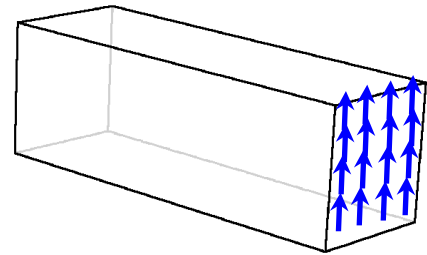
$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$: allongement relatif (sans unité)

6 - Cisaillement

6.1 Relation Sollicitation - Contrainte

$$\tau = \frac{T}{S}$$

T : effort tranchant en N
 S : surface de la section en m^2



La contrainte tangentielle engendrée est identique dans toute la section :

6.2 Loi de comportement élastique

$$\tau = G \cdot \gamma$$

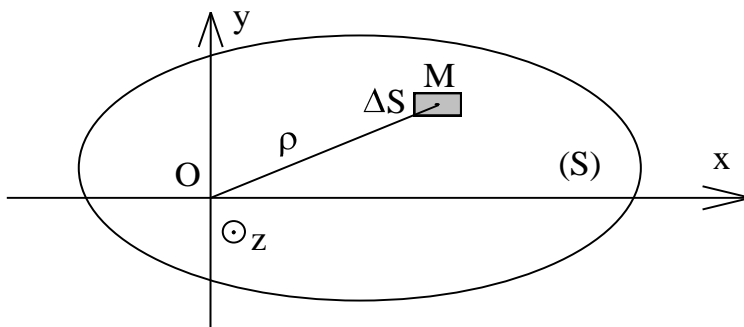
G : module de Coulomb en Pa

$\gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$: glissement transversal relatif (sans unité)

7 - Torsion

7.1 Moment quadratique polaire

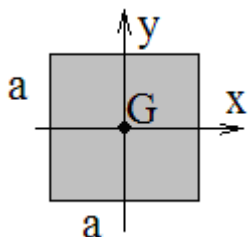
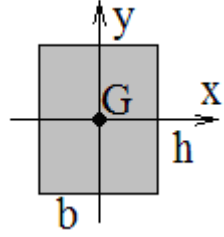
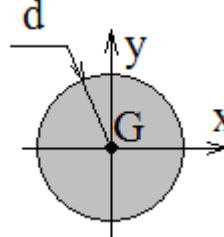
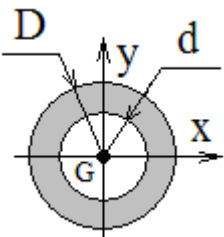
7.1.1. définition



Le moment quadratique polaire de la surface (S) par rapport au point O est :

$$I_o = \sum_{(S)} \rho^2 \cdot \Delta S$$

7.1.2. quelques expressions usuelles

 $I_G = \frac{a^4}{6}$	 $I_G = \frac{bh \cdot \left(\frac{b^2}{3} + h^2 \right)}{12}$	 $I_G = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$	 $I_G = \frac{\pi \cdot \left(D^4 - d^4 \right)}{32}$
---	--	---	---

7.2 Relation Sollicitation - Contrainte

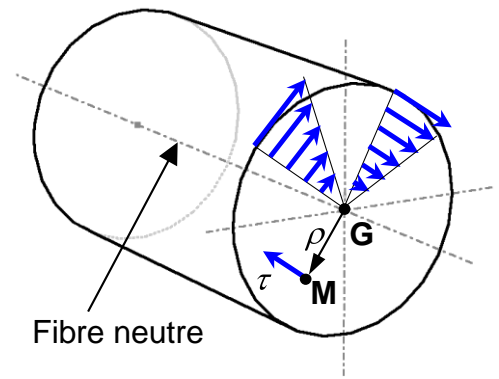
$$\tau = \frac{M_t}{I_G} \cdot \rho$$

M_t : moment de torsion en Nm

I_G : moment quadratique polaire de la section en m^4

ρ : distance au centre de la section en m

La contrainte tangentielle engendrée est nulle au centre de la section (fibre neutre) et est de plus en plus élevée lorsqu'on s'en éloigne.



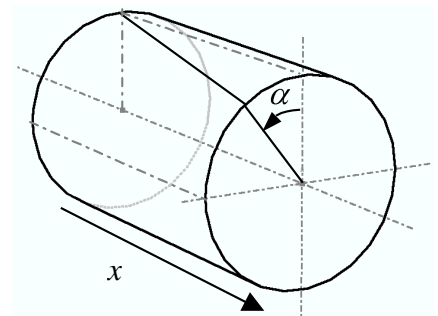
7.3 Loi de comportement élastique

G : module de Coulomb en Pa

$$M_t = G \cdot \theta \cdot I_G$$

$\theta = \frac{\alpha}{x}$: angle de torsion unitaire en rad/m

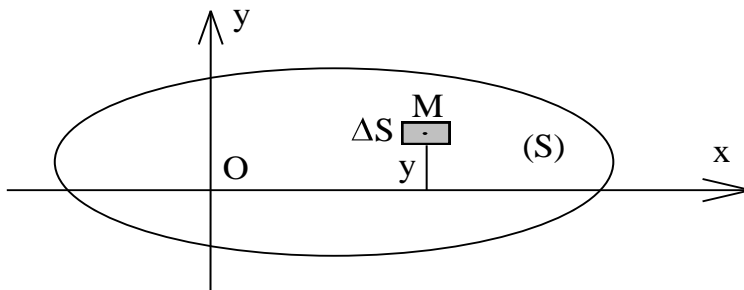
I_G : moment quadratique polaire de la section en m^4



8 - Flexion

8.1 Moment quadratique par rapport à un axe

8.1.1. définition



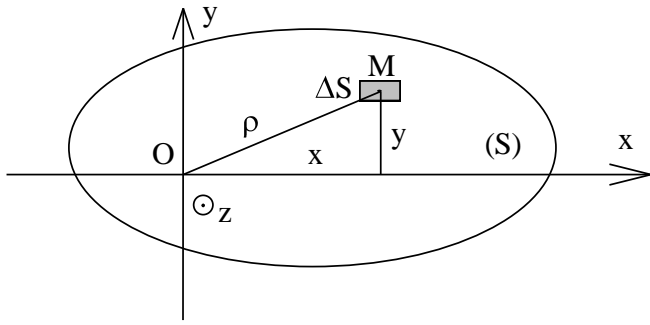
Le moment quadratique de la surface (S) par rapport à l'axe (Ox) est :

$$I_{Ox} = \sum_{(S)} y^2 \cdot \Delta S$$

8.1.2. quelques expressions usuelles

$I_{Gx} = I_{Gy} = \frac{a^4}{12}$	$I_{Gx} = \frac{bh^3}{12} \quad I_{Gy} = \frac{hb^3}{12}$	$I_{Gx} = I_{Gy} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$I_{Gx} = I_{Gy} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$

8.1.3. relation entre moment quadratique polaire et axial



On a : $\rho^2 = x^2 + y^2$

donc : $I_O = \sum_{(S)} \rho^2 \cdot \Delta S = \sum_{(S)} x^2 \cdot \Delta S + \sum_{(S)} y^2 \cdot \Delta S$

d'où : $I_O = I_{Ox} + I_{Oy}$

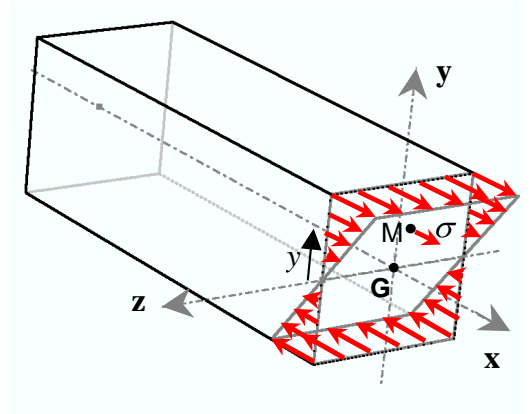
8.2 Relation Sollicitation - Contrainte

$$\sigma = -\frac{Mf_z}{I_{Gz}} \cdot y$$

Mf_z : moment de flexion en Nm

I_{Gz} : moment quadratique de la section par rapport à l'axe (Gz) en m^4

y : distance par rapport à l'axe (Gz) en m



La contrainte normale engendrée est nulle le long de l'axe (Gz) (fibre neutre) et est de plus en plus élevée lorsqu'on s'en éloigne.

8.3 Loi de comportement élastique

$$Mf_z = E \cdot I_{Gz} \cdot f''$$

Mf_z : moment de flexion en Nm

E : module de Young en Pa

I_{Gz} : moment quadratique par rapport à l'axe z de la section en m^4

f : flèche (écart verticale par rapport à la position sans sollicitation) en m

f'' : dérivée seconde de la flèche par rapport à l'abscisse x

Pour obtenir l'expression de la flèche, on intègre 2 fois la formule précédente. Les constantes qui apparaissent lors des intégrations sont déterminées grâce aux conditions aux limites.

