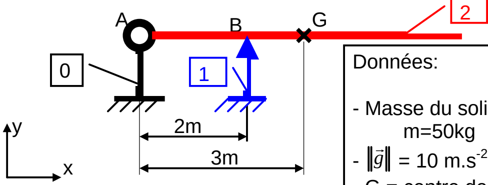
Tale STI Electronique Mécanique 2003

Statique : résolution analytique

I. Mise en situation

Dans le cas où le système matériel isolé ne présente pas de plan de symétrie, la résolution du problème de statique ne peut se faire que de manière analytique. La résolution du problème ci-dessous rappelle les grandes étapes de ce type de résolution.
Le système schématisé ci-dessous représente un plongeoir de piscine. La planche 2 de ce plongeoir est considérée en équilibre.



Données:

- Masse du solide 2 m=50kg
- $\|\vec{g}\|$ = 10 m.s^{-2}
- G = centre de gravité du solide 2

- **Système isolé : S = {2}**

- **Bilan des actions mécaniques extérieures agissant sur S**
  - Action de contact exercée par **0** sur **2** en **A**
  - Action de contact exercée par **1** sur **2** en **B**
  - Action à distance de la **pesanteur** sur **2** en **G**

II. Modélisation des actions mécaniques

Chaque action mécanique est ensuite modélisée par un torseur.

- **Action de liaison exercée par 0 sur 2 en A**

$$\{\tau_{0\to2}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{A}_{0\to2} = X_{0/2}.\vec{x} + Y_{0/2}.\vec{y} \\ \vec{M}_{A(0\to2)} = \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{0/2} & 0 \\ Y_{0/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$ *(2 inconnues)*

- **Action de liaison exercée par 1 sur 2 en B**

$$\{\tau_{1\to2}\} = {}_B\begin{Bmatrix} \vec{B}_{1\to2} = Y_{1/2}.\vec{y} \\ \vec{M}_{B(1\to2)} = \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$ *(1 inconnue)*

- **Action de la pesanteur sur 2 en G**

$$\{\tau_{pes/2}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{P} = m.\vec{g} \\ \vec{M}_{G(pes\to2)} = \vec{0} \end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -m\times g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -500 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

III. Ecriture du PFS au point A

La somme des torseurs modélisant chaque action mécanique est égale au torseur nul.

Remarque : Tous les torseurs doivent être exprimés au même centre de réduction.

$${}_A\{\tau_{0/2}\} + {}_A\{\tau_{1/2}\} + {}_A\{\tau_{pes/2}\} = \{0\}$$

Déplacement des torseurs au point A

Lors de la modélisation, les différentes actions mécaniques sont modélisées en des points différents. Certains torseurs doivent donc être déplacés de leur point d'origine au point A.

Lors d'un changement de centre de réduction :

- la résultante reste inchangée ;
- le moment résultant varie suivant la relation de changement de point.

$$\{\tau_{(1\to2)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{B}_{(1\to2)} = Y_{1/2}.\vec{y} \\ \vec{M}_{A(1\to2)} = \vec{M}_{B(1\to2)} + \vec{AB}\wedge\vec{B}_{(1\to2)} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1/2} & 0 \\ 0 & 2\times Y_{1/2} \end{Bmatrix}$$

avec $\vec{M}_{A(1\to2)} = \vec{M}_{B(1\to2)} + \vec{AB}\wedge\vec{B}_{(1/2)}$

$$= \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ Y_{1/2} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.Y_{1/2} \end{bmatrix}$$

$$\{\tau_{(pes\to2)}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{P} = -500.\vec{y} \\ \vec{M}_{A(pes\to2)} = \vec{M}_{G(pes\to2)} + \vec{AG}\wedge\vec{P} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -500 & 0 \\ 0 & -1500 \end{Bmatrix}$$

- **Réécriture du Principe Fondamental de la Statique en exprimant chaque torseur par ces coordonnées :**

$${}_A\begin{Bmatrix} X_{0/2} & 0 \\ Y_{0/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} + {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1/2} & 0 \\ 0 & 2.Y_{1/2} \end{Bmatrix} + {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -500 & 0 \\ 0 & -1500 \end{Bmatrix} = \{0\}$$

IV. Ecriture des équations

En appliquant le théorème de la résultante :

- En projection sur **x** : $X_{0/2} = 0$ (1)
- En projection sur **y** : $Y_{0/2} + Y_{1/2} - 500 = 0$ (2)

En appliquant le théorème du moment résultant :

- en projection sur **z** : $2.Y_{1/2} - 1500 = 0$ (3)

On obtient un système de **3 équations à 3 inconnues** dont la résolution est possible.

V. Résolution et résultats

(3) ⇒ $\boxed{Y_{1/2} = 750\text{ N}}$ (1) ⇒ $\boxed{X_{0/2} = 0}$

(2) ⇒ $\boxed{Y_{0/2} = -250\text{ N}}$

$$\{\tau_{0\to2}\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -250 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{A}_{0\to2} = -250.\vec{y}}$$

$$\{\tau_{1\to2}\} = {}_B\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 750 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \boxed{\vec{B}_{1\to2} = 750.\vec{y}}$$

Editeur : MemoPage.com SA © Date : juin 2002
Auteur : Stéphane Laurensou ISSN : en cours

Le MemoPage ne se coupe pas, il se plie en 2 puis encore en 2.