Statique

1 - Isolement d'un système matériel

On appelle **Système Matériel** une quantité de matière dont la masse reste constante pendant qu'on l'étudie.

Un système matériel peut être :

- un solide (ex : mors mobile de l'étau)
- un ensemble de solides (ex : l'étau complet)
- une masse de fluide (ex : l'eau d'un barrage E.D.F.)
- des solides et des fluides (ex : un vérin hydraulique)

Isoler un système matériel consiste à « diviser » l'univers en 2 parties :

- le système matériel considéré, noté S.
- le milieu extérieur à S, c'est à dire tout ce qui n'est pas S et qui est susceptible d'agir sur lui, que l'on note ext.

On distingue alors :

- les A.M. **intérieures** à S, qui agissent entre les éléments de S.
- les A.M. **extérieures** à S, qui sont exercées par ext sur S.

L'ensemble des A.M. extérieures peut être modélisée par un unique torseur exprimé en un point A quelconque:

$$\left\{\tau_{ext \to S}\right\} = \left\{\begin{matrix} \vec{R}(ext \to S) \\ \vec{M}_A(ext \to S) \end{matrix}\right\}_A$$

2 - Equilibre d'un système matériel dans un repère galiléen

Un système matériel est en **équilibre** par rapport à un repère s'il est **immobile** dans ce repère.

Un repère est dit **galiléen** s'il est **fixe** ou en mouvement de **translation rectiligne à vitesse constante** dans l'univers.

Pour nos études de mécanique, les repères liés à la Terre ou en translation rectiligne à vitesse constante par rapport à la Terre seront considérés comme galiléens.

Ex :
- un repère lié à un véhicule qui roule en ligne droite à vitesse constante sera considéré comme galiléen.
- un repère lié à un véhicule qui prend un virage, qui freine ou qui accélère ne pourra pas être considéré comme galiléen.

3 - Principe fondamental de la statique

Si un système matériel S est en équilibre dans un repère galiléen, **alors** le torseur des A.M. extérieures est égal au torseur nul :

$$\boxed{\left\{\mathcal{T}_{ext\to S}\right\} = \left\{\vec{0}\right\}}$$

Ce qui se traduit par 2 théorèmes :

→ Théorème de la résultante statique :

Si le système est en équilibre alors la somme des résultantes des A.M. extérieures est nulle.

→ Théorème du moment statique :

Si le système est en équilibre alors la somme des moments des A.M. extérieures par rapport à un même point est nulle.

Remarques :

❶ L'application du P.F.S. fournit 6 équations :

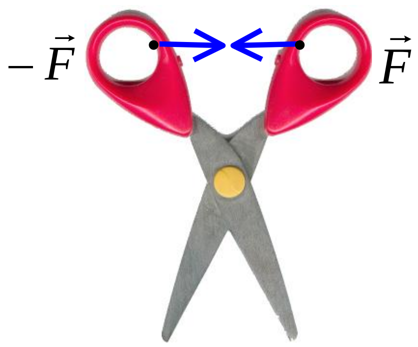
théorème de la résultante statique : $\begin{cases} \sum R_X = 0 \\ \sum R_Y = 0 \\ \sum R_Z = 0 \end{cases}$ théorème du moment statique : $\begin{cases} \sum M_X = 0 \\ \sum M_Y = 0 \\ \sum M_Z = 0 \end{cases}$

❷ ***Attention !***

Si le torseur des A.M. extérieures à un système est nul, le système n'est pas forcément en équilibre.

Ex : une paire de ciseaux

Si l'utilisateur exerce 2 forces opposées sur les ciseaux, le torseur des A.M. extérieures aux ciseaux est nul, mais le système n'est pas en équilibre (les ciseaux vont se fermer)



4 - Cas d'un système soumis à 2 ou 3 forces

4.1 Système soumis à 2 forces

Soit un système S en équilibre sous l'action de 2 forces $\vec{A}_{ext \to S}$ et $\vec{B}_{ext \to S}$ appliquées en **A** et en **B**.

L'application du P.F.S. se traduit par :

→ Le théorème de la résultante statique :

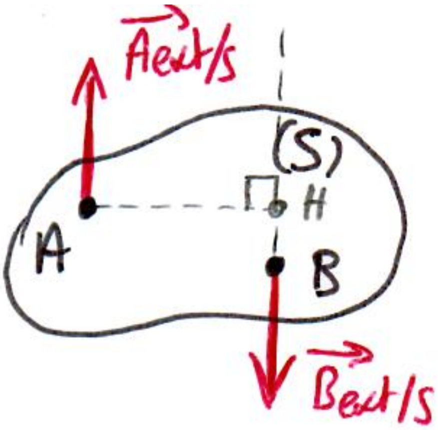
$$\vec{A}_{ext \to S} + \vec{B}_{ext \to S} = \vec{0} \quad \text{d'où} \quad \vec{A}_{ext \to S} = -\vec{B}_{ext \to S}$$

Conclusion : Les 2 forces sont **opposées** (même norme, même direction, sens contraire)

→ Le théorème du moment statique :

La somme des moments de chacune de ces forces par rapport à un point quelconque est nulle.

ex :



On doit avoir :

$$\vec{M}_A\left(\vec{A}_{ext \to S}\right) + \vec{M}_A\left(\vec{B}_{ext \to S}\right) = \vec{0}$$

or $\vec{M}_A\left(\vec{A}_{ext \to S}\right) = \vec{0}$ car A est le point d'application de la force

donc $\vec{M}_A\left(\vec{B}_{ext \to S}\right) = \vec{0}$

or $M_A\left(\vec{B}_{ext \to S}\right) = AH \times B_{ext \to S}$

comme $B_{ext \to S} \neq 0$ alors $\boxed{AH = 0}$

Conclusion : Les 2 forces ont **même droite d'action**.

En résumé : Si un système est en équilibre sous l'action de 2 forces alors ces 2 forces sont **opposées** et ont **même droite d'action**.

4.2 Système soumis à 3 forces

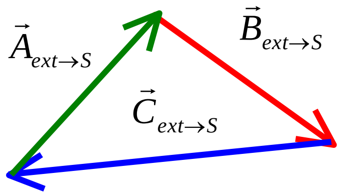
Soit un système S en équilibre sous l'action de 3 forces quelconques $\vec{A}_{ext \to S}$, $\vec{B}_{ext \to S}$ et $\vec{C}_{ext \to S}$ appliquées aux points **A**, **B** et **C**.

Le P.F.S. se traduit alors par :

→ Le théorème de la résultante statique :

$$\vec{A}_{ext\to S}+\vec{B}_{ext\to S}+\vec{C}_{ext\to S}=\vec{0}$$

Ceci se traduit graphiquement par le fait que le triangle formé par les 3 vecteurs mis bout à bout est fermé et donc que les 3 vecteurs sont contenus dans un même plan.

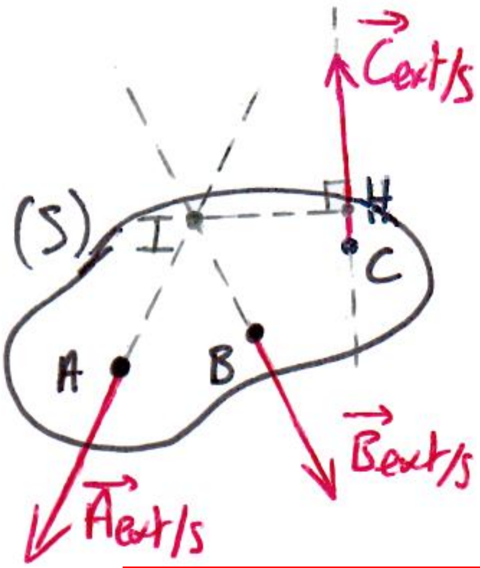


Conclusion : La **somme** ***vectorielle*** des 3 vecteurs force est **nulle** et ces 3 vecteurs sont donc **coplanaires**.

→ Le théorème du moment statique :

La somme des moments de chacune des 3 forces par rapport à un point quelconque est nulle.

ex :



Soit I le point d'intersection des droites d'action de $\vec{A}_{ext\to S}$ et $\vec{B}_{ext\to S}$

On doit avoir :

$$\vec{M}_I(\vec{A}_{ext\to S})+\vec{M}_I(\vec{B}_{ext\to S})+\vec{M}_I(\vec{C}_{ext\to S})=\vec{0}$$

or $\vec{M}_I(\vec{A}_{ext\to S})=\vec{0}$ et $\vec{M}_I(\vec{B}_{ext\to S})=\vec{0}$ car I est sur les droites d'action de $\vec{A}_{ext\to S}$ et $\vec{B}_{ext\to S}$

donc $\vec{M}_I(\vec{C}_{ext\to S})=\vec{0}$

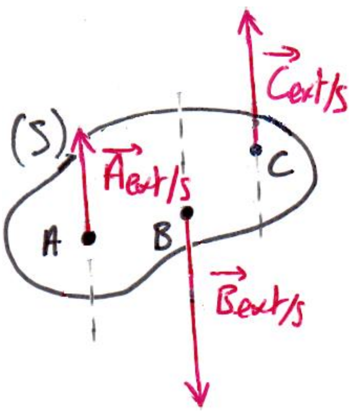
donc $M_I(\vec{C}_{ext\to S})=IH\times C_{ext\to S}=0$

comme $C_{ext\to S}\neq 0$ alors $\boxed{IH=0}$

Conclusion : Les droites d'action des 3 forces sont **concourantes**.

Attention,

cas particulier :



Si 2 des 3 forces sont parallèles alors elles ne peuvent pas être concourantes.

Dans ce cas, la 3ème force est forcément parallèle aux 2 autres pour que leur somme vectorielle puisse être nulle.

De plus pour que le théorème du moment statique soit respecté, les 3 forces doivent se trouver dans un même plan.

En résumé : Si un système est en équilibre sous l'action de 3 forces **non parallèles**, alors ces 3 forces sont **concourantes**, **coplanaires** et de **somme vectorielle nulle**.

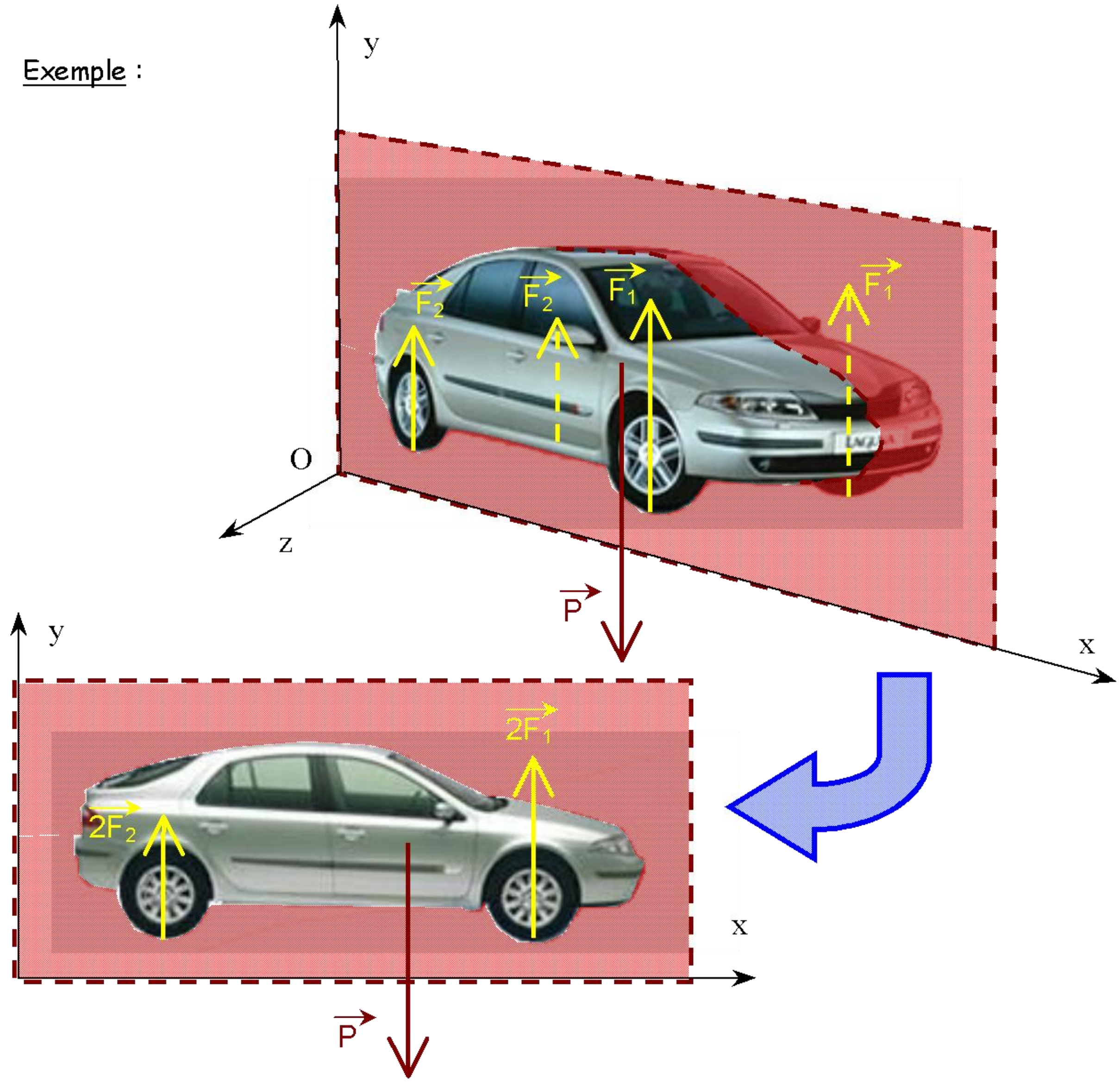
Si un système est en équilibre sous l'action de 3 forces dont 2 sont **parallèles**, alors ces 3 forces sont **parallèles**, **coplanaires** et de **somme vectorielle nulle**.

5 - Simplification plane

Si la géométrie des liaisons d'un système matériel présente un **plan de symétrie** et que les A.M. extérieures exercées sur ce système sont symétriques par rapport à ce plan, alors on peut admettre que le mécanisme est **« plan »**, c'est à dire que :

- les **résultantes** des A.M. extérieures sont contenues **dans le plan de symétrie**
- les **moments** des A.M. extérieures sont **perpendiculaires au plan de symétrie**.

Exemple :



Le plan (O,x,y) est plan de symétrie de la géométrie et des A.M. extérieurs donc toutes les A.M. s'écrivent sous la forme suivante :

$$_A\left\{\begin{matrix} X & - \\ Y & - \\ - & N \end{matrix}\right\} \quad \text{A quelconque}$$

L'application du PFS ne nécessite donc que la résolution de **3 équations** :

$$\begin{cases} \sum R_X = 0 \\ \sum R_Y = 0 \\ \sum M_Z = 0 \end{cases}$$

6 - Equilibre isostatique ou hyperstatique

6.1 Définition

Un système matériel est en **équilibre isostatique** si les composantes inconnues des torseurs des A.M. extérieures peuvent être déterminées uniquement avec les 6 équations fournies par le P.F.S. (3 équations dans le cas d'un système plan).

Dans le cas contraire (plus d'inconnues que d'équations fournies par le PFS), on dit que le système est en **équilibre hyperstatique**.

6.2 Comment reconnaître un système en équilibre hyperstatique ?

Si le système que l'on isole possède plus de liaisons élémentaires avec l'extérieur que le strict minimum permettant d'assurer ses mobilités, alors il est en équilibre hyperstatique.

6.3 Exemples de systèmes en équilibre iso ou hyperstatique

Systèmes isostatiques :	Systèmes hyperstatiques :
- une porte avec une seule charnière - un tabouret en appui sur 3 pieds	- une porte avec plus d'une charnière - le coulisseau d'une carrelette avec ses 2 liaisons pivot glissant - un tabouret en appui sur 4 pieds

6.4 Comment résoudre un problème hyperstatique ?

- En formulant des hypothèses simplificatrices

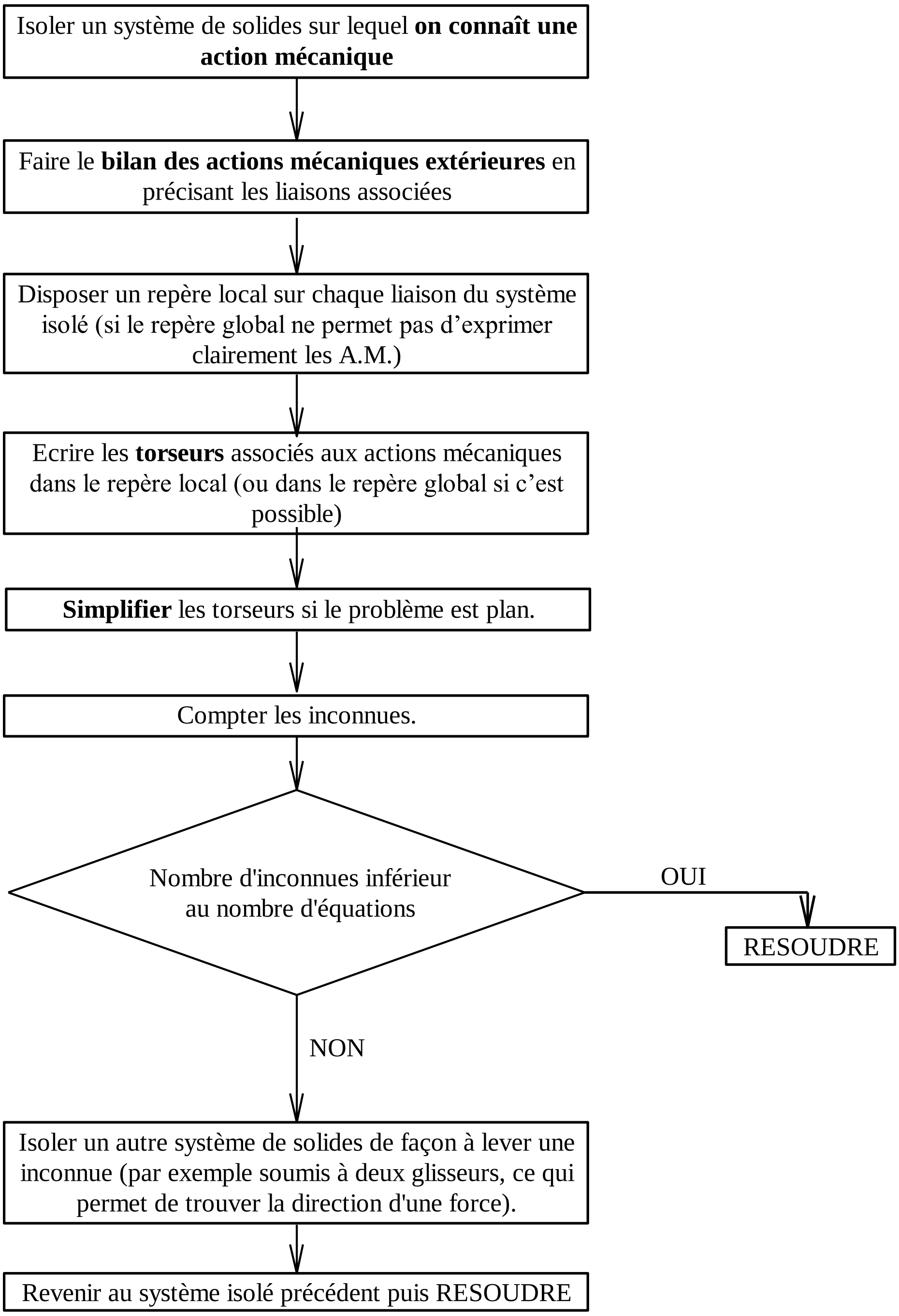
  ex : pour un cric rouleur hydraulique on fait l'hypothèse que les A.M. sur les roues sont identiques de chaque côté (hypothèse de symétrie)

  ex : pour une carrelette on remplace les 2 pivots glissants par une glissière
- En faisant appel à des calculs d'élasticité des matériaux (hors programme).

6.5 Avantages et inconvénients des systèmes iso ou hyperstatiques

	Avantages	**Inconvénients**
Système Isostatique	• Calcul aisé des efforts ext. • Montage facile • Pas besoin de précision dans le positionnement relatif des liaisons	• Solidité et rigidité réduites ou obtenues en apportant beaucoup de matière.
Système Hyperstatique	• Solidité et rigidité avec peu de matière	• Difficultés de calcul des efforts • Montage parfois délicat • Nécessité de réalisation des liaisons avec plus de précision.

7 - Démarche de résolution d'un problème de statique



<u>Remarques</u> :

❶ Pour simplifier la résolution il est conseillé d'appliquer le théorème du moment statique au centre d'une liaison dont le torseur associé comporte beaucoup d'inconnues. On limite ainsi le nombre d'inconnues dans les équations obtenues.

❷ Lorsqu'un système comporte beaucoup de pièces à isoler, il est conseillé de commencer par isoler les solides soumis à 2 forces.
Ceci permet de déterminer rapidement la direction de ces forces et simplifie les calculs par la suite.